МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

ПРОГРАМА

вступного екзамену до аспірантури за спеціальністю

113 “Прикладна математика”

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою факультету прикладної
математики та інформатики
(протокол № 6 від 27 червня 2024 року)

Львів – 2024

1. ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПРОСТОРИ І ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ОПЕРАТОРИ

Лінійні нормовані, банахові та гільбертові простори, приклади. Простори Гьольдера та Соболєва.

Неперервні лінійні оператори. Ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні оператори. Обернені оператори. Критерій існування оберненого оператора.

Компактні оператори та їх властивості. Теорія Рісса-Шаудера про розв'язність операторного рівняння другого роду з компактним оператором.

Спряжені та самоспряжені оператори в гільбертовому просторі. Лінійні неперервні функціонали, спряжений простір, теорема Гана – Банаха. Теорема Рісса про представлення лінійного неперервного функціоналу в гільбертовому просторі.

2. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Вектори, матриці та операції над ними. Визначники і їх властивості. Система лінійних алгебраїчних рівнянь і їх дослідження. Метод Гауса. Ітераційні методи розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Умови збіжності ітераційних методів.

Лінійні оператори в скінченновимірному просторі та їх матричне представлення. Характеристичний многочлен, власні числа і власні вектори лінійного оператора. Спряжені і самоспряжені оператори. Квадратичні форми, приведення їх до канонічного вигляду.

Методи знаходження максимального за модулем власного числа. Метод степенів, метод скалярних добутків. Методи розв'язування повної проблеми власних значень. Метод Якобі. Метод бісекцій для розв'язування Перетворення Хаусхолдера

3. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ І СИСТЕМ

Ітераційний процес та його збіжність. Метод січних. Метод поділу відрізка пополам. Метод простої ітерації та його збіжність.

Метод ітерації для системи рівнянь. Метод Ньютона та його видозміни. Метод спуску.

4. НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

Постановка задачі інтерполювання та її коректність. Подання інтерполяційного многочлена у формах Лагранжа та, Ньютона.

Сплайни. Інтерполяція за допомогою сплайнів. В-сплайни.

Інтерполяція періодичних функцій.

Постановка задачі побудови елемента найкращого наближення у нормованому просторі та її коректність.

Властивості елемента найкращого наближення у евклідовому просторі. Ортогональні поліноми. Найкраще середньо-квадратичне наближення.
Чисельне диференціювання.

5. ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

Квадратурні формули Ньютона – Котеса. Квадратури для періодичних функцій.

Квадратурні формули Гаусса. Квадратури для інтегралів з особливостями.

Метод Монте-Карло.

6. КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Рівняння еліптичного типу та крайові задачі для них (електростатика, теплопровідність, кручення стержнів). Крайові умови Діріхле, Неймана та змішана. Коректно поставлена крайова задача. Принцип максимума.

Теорія потенціалу. Формула Гріна. Прямий та непрямий метод граничних інтегральних рівнянь.

Різницеві методи розв'язування крайових задач. Апроксимація, стійкість і збіжність.

Варіаційні постановки задач: задача мінімізації, задача для варіаційного рівняння. Існування та єдиність розв'язку, його обмеженість.

Метод Рітца та його збіжність. Властивості апроксимацій Рітца. Метод Гальоркіна та його збіжність.

Апроксимації методу скінченних елементів, оцінка швидкості їх збіжності.

7. ПОЧАТКОВО-КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Рівняння параболічного типу та застосування, що приводять до них (теплопровідність, дифузія домішок). Постановка крайових та початкових умов. Коректно поставлені задачі.

Різницеві методи розв'язування параболічних задач. Апроксимація, стійкість і збіжність. Явні та неявні схеми. Умовно стійкі та безумовно стійкі схеми.

Варіаційна постановка початково – крайової задачі. Енергетичне рівняння. Єдиність розв'язку. Напівдискретизація Гальоркіна. Одно крокові рекурентні схеми розв'язування напівдескретизо- ваних задач, їх стійкість, збіжність.

8. ПОЧАТКОВО-КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Рівняння гіперболічного типу та його застосування, що приводять до них (акустика, коливання струни). Різницеві методи для гіперболічних задач.

Варіаційна постановка задачі. Енергетичне рівняння. Кінетична, потенціальна енергії та їх дисипація. Єдиність та обмеженість розв'язку.

Напівдискретизація Гальоркіна. Методи розв'язування напівдискретизованих задач, їх стійкість та збіжність.

9. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Метод заміни ядра на вироджене. Метод Нистрьома.

Проекційні методи. Метод граничних елементів.

10. МЕТОДИ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ ДЛЯ НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ.

Коректність за Адамаром. Лінійне рівняння з компактним оператором та його некоректність. Приклади некоректних задач.

Метод Тіхонова для лінійного операторного рівняння та його збіжність. Принцип нев'язки Морозова.

Ітераційні регуляризуючі методи. Метод Ландвебера.

11. МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Необхідні та достатні умови екстремума функції. Умовні екстремуми. Методи відшукання безумо- вного екстремума: градієнтний метод, метод Ньютона, метод спряжених градієнтів.

Задача лінійного програмування та сиплекс – метод для її розв'язування.

Чисельні методи нелінійного програмування: метод штрафних функцій.

Методи оптимізації, які ґрунтуються на послідовному аналізі варіантів.

12. ПРИКЛАДНЕ ПРОГРАМУВАННЯ. ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Покоління ЕОМ. Основні класи і структурні особливості сучасних ЕОМ. Поняття алгоритму. Алго- ритмічні мови. Поняття про принципи програмування. Структурне і модульне програмування.

Характеристика основних елементів математичного забезпечення ЕОМ. Функції операційної системи і режими роботи.

Етапи проходження задачі та їх контроль. Система програмування і її основні функції: трансля- ція, діагностика, відладка і редагування.

Прикладне програмне забезпечення. Бази даних і їх класифікація. Пакети прикладних програм. Функціональне і системне наповнення пакета. Способи опису алгоритмічних мов.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бартіш М. Я., Дудзяний І. М. Дослідження операцій.- Львів: Видавн. центр ЛНУ імені Івана Фра- нка. Ч. 1-5, 2011.
2. Березанський Ю.М, Ус. Г.Ф., Шефтель З.Г. Функціональний аналіз: підручник. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2014.
3. Гаврилюк І. П., Макаров В. Л. Методи обчислень. – К.: Вища школа, 1995. Ч. 1, 2.

4. Остудін Б. А., Шинкаренко Г. А. Методи функціонального аналізу в обчислювальній математиці.– Львів: Світ поліграфії, 1998.
5. Савула Я. Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. – Львів: Видавн. центр ЛНУ імені Івана Франка. – Львів, 2004.
6. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика. – Київ, 2007.
7. Цегелик Г. Г. Чисельні методи. – Львів: Видавн. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004.
8. Шахно С. М. Чисельні методи лінійної алгебри. – Львів: Видавн. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. - 245 с.
9. Atkinson K. The numerical solution of integral equations of the second kind.- Cambridge University Press, 2009.
10. Katsikadelis J. T. Boundary elements: theory and applications.- Elsevier, 2002.
11. Kirsch A. An introduction to the mathematical theory of inverse problems.- New York: Springer, 2012.
12. Kontromanos I., McClure J., Roy C. Fundamentals of finite element analysis: linear finite element analysis.- John Wiley&Sons, 2018.
13. Kress R. Numerical analysis. – New York: Springer, 1998.
14. Kress R. Linear integral equations.- Berlin: Springer, 2013.
15. Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. Numerical mathematics. – New York: Springer, 2000.
16. Zienkiewicz O. C. The finite element method. Vol. 1: the basis. Oxford: Butterworth & Heinemann, 2002.